筆答専門試験科目(午前)　　　2024 大修
経営工学　　　時間 10：00〜11：00

注意事項

1. 筆答専門試験は，数理分野から 1 問，経済学分野から 1 問の計 2 問の問題から構成されている．

2. 数理分野の問題と経済学分野の問題のうち 1 つを選択して解答せよ． **両方の問題に解答した場合は，すべての解答を無効とする．**

3. 数理分野の問題は 4 題の設問 ([1], [2], [3] , [4]) , 経済学分野の問題は 2 題の設問 ([1], [2])で構成されている．解答に当たっては，<u>**設問**ごとに必ず**別々の解答用紙**を用いよ</u>． 1 枚の解答用紙に 2 題以上の設問を解答した場合，採点されないことがある．

4. 各設問の解答において，1 枚の解答用紙では足りなくなった際には，2 枚目を使ってよい．**裏面には記述しないこと**．

5. 各解答用紙には，**受験番号**，**分野名**（数理または経済学），および**設問番号** ([1], [2], [3] , [4]) を必ず記入せよ．

数理分野 (200 点)

次の設問 **[1]**，**[2]**，**[3]**，**[4]** のすべてに解答せよ．

[1] 以下の小問 (1) から (3) に答えよ．

(1) 集合 $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ は線形部分空間である．この線形部分空間の直交基底をひとつ求めよ．ただし，求める直交基底に含まれるベクトルの各成分は整数であるものとし，ベクトル $(2, -1, -1)$ を含むものとする．結果のみ書けばよい．

(2) 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

について考える．以下の問い (a) から (c) に答えよ．

(a) A の固有値および対応する固有ベクトルをすべて求めよ．ただし，求める固有ベクトルのノルムは 1 とする．計算過程を明記すること．

(b) $A = PDP^{-1}$ を満たす 2×2 実直交行列 P と 2×2 実対角行列 D を求めよ．結果のみ書けばよい．

(c) 行列 A の 9 乗 A^9 を求めよ．計算過程を明記すること．

(3) n は正の整数とする．3 つの n 次元実数ベクトル

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n), \quad \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

について考える．以下の問い (a) と (b) に答えよ．

(a) $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が線形独立であることの定義, および線形従属であることの定義を書け．

(b) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の各成分を以下のように定義する．

$$a_k = 1, \quad b_k = k, \quad c_k = k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

各 $n = 1, 2, \ldots$ の場合において，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ が線形独立と線形従属のどちらになるかを答えよ．また，線形独立と線形従属の定義に基づき，その証明を書け．

[2] 以下の小問 (1) と (2) に答えよ．

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \log_e\left(\left(\frac{1}{n}\right)\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right)$$

の値を計算せよ．計算過程を明記すること．

(2) 次の常微分方程式を解け．計算過程を明記すること．

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy - 2x^2$$

次ページにつづく

[3] 整数の集合 $\mathbb{Z}$ 上の関係 R を次のように定義する．整数の順序対 $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ に対し，$5a - 8b$ が 3 の倍数であるとき，$a\mathrm{R}b$ と書く．以下の小問 (1) と (2) に答えよ．

(1) 関係 R が同値関係であることを示せ．

(2) 同値関係 R の同値類で，0 を含む同値類 $C(0)$ はどのような集合か答えよ．結果のみ記述すればよい．

[4] 箱の中に赤色の球が 3 個，青色の球が 2 個入っている．それぞれの球には，赤色は 1，青色は 2 と数字が記載されている．最初に 1 個の球を取り出したときの球の数字を X，その取り出した球を戻さずに，続けてもう 1 個の球を取り出したときの球の数字を Y とする．以下の小問 (1) から (6) に答えよ．

(1) X と Y の同時分布を求めよ．

(2) X，Y の周辺分布をそれぞれ求めよ．

(3) $X = 2$ のときの Y の条件付き分布を求めよ．

(4) X と Y が独立か否か，理由とともに答えよ．

(5) $E(X)$，$E(XY)$，$V(X)$ をそれぞれ求めよ．ただし，E は期待値，V は分散を表す．

(6) X と Y の相関係数を求めよ．

経済学分野 (200 点)

次の設問 **[1]**，**[2]** のすべてに解答せよ．

[1] 2 人の消費者（消費者 1 と 2），及び 2 種類の財 X, 財 Y からなる交換経済を考える．消費者 i の初期保有が (w_{xi}, w_{yi})，消費者 i の効用関数が

$$u_i(x_i, y_i) = x_i + \ln y_i$$

で与えられているとする（$i = 1, 2$）．ここで，w_{xi} は消費者 i の財 X の初期保有量，w_{yi} は消費者 i の財 Y の初期保有量，x_i は消費者 i の財 X の消費量，y_i は消費者 i の財 Y の消費量を表し，ln は自然対数である．また，財 X の価格を p_x と表し，以下では財 Y の価格は 1 に固定し $p_y = 1$ とする．以下の小問 (1) から (5) に答えよ．答えの理由や計算プロセスも記述すること．

(1) $w_{x1} + w_{x2} = w_{y1} + w_{y2} = 2$ とする．パレート効率な配分の集合を求めよ．また，エッジワース・ボックスに求めた集合を図示せよ．

(2) $(w_{x1}, w_{y1}) = (2, 0), (w_{x2}, w_{y2}) = (0, 2)$ とする．競争（市場）均衡配分と均衡価格を求めよ．エッジワース・ボックスに競争（市場）均衡を図示せよ．すなわち，均衡配分，均衡配分を通る消費者 1 と 2 の無差別曲線と予算線および初期保有配分を図示せよ．

(3) $(w_{x1}, w_{y1}) = (1/2, 0), (w_{x2}, w_{y2}) = (3/2, 2)$ とする．競争（市場）均衡配分と均衡価格を求めよ．エッジワース・ボックスに競争（市場）均衡を図示せよ．すなわち，均衡配分，均衡配分を通る消費者 1 と 2 の無差別曲線と予算線および初期保有配分を図示せよ．

(4) $(w_{x1}, w_{y1}) = (w, 0), (w_{x2}, w_{y2}) = (2 - w, 2)$ とする．$0 < w < 2$ を満たす各 w の値について，競争（市場）均衡配分と均衡価格を求めよ．

(5) $(w_{x1}, w_{y1}) = (w, w), (w_{x2}, w_{y2}) = (2 - w, 2 - w)$ とする．$0 < w < 2$ を満たす各 w の値について，競争（市場）均衡配分と均衡価格を求めよ．

次ページにつづく

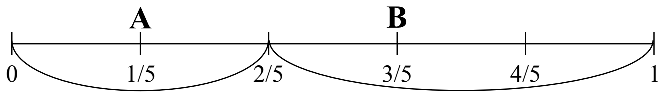
[2] $[0,1]$ 区間上に客（消費者）が一様に分布しているとする．この区間上に同質な製品を販売する n 個の企業が 1 店舗ずつ出店することを考えている．各店舗の集客数は，自社の出店場所だけではなく他社の出店場所にも依存する．ここで，集客数とは全体（$[0,1]$ 区間上のすべての客数）を 1 としたときの割合とする．

以下の **(R1)** と **(R2)** を仮定する．

(R1) 客は自身の位置から一番近い店舗のうちのどれかに行く．

(R2) k 個の店舗が同じ場所に出店する場合，その地点の集客数は各店舗に $1/k$ ずつ等分される．

例えば，下の図のように企業 1 が A 地点, 企業 2 が B 地点に出店するとする. このとき, 企業 1 の集客数は 2/5, 企業 2 の集客数は 3/5 となる．ここで，企業 3 も B 地点に出店した場合，企業 1 の集客数は 2/5 のままで変わらず，企業 2, 3 の集客数は 3/10 となる．



各企業 i は自社の店舗への集客数を最大にするように出店場所 $x_i \in [0,1]$ を決定する．また，n 企業の出店位置 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ が与えられたとき，地点 t に位置する客（消費者）の利得は, 自身から一番近い店舗までの距離を $d(t,x)$ とすると, $f(t,x) = 1 - d(t,x)^2$ である．ただし，

$$d(t,x) = d(t,(x_1,\ldots,x_n)) = \min_{j\in\{1,\ldots,n\}} |t - x_j|.$$

このとき，次の小問 (1) から (5) に答えよ．答えの理由や計算プロセスも記述すること．

(1) 2 企業が出店を考えているとする（$n = 2$）．このとき，企業 $i \in \{1,2\}$ の集客数を式で表せ．

(2) $n = 2$ のとき，ナッシュ均衡をひとつ求めよ．また，均衡における消費者余剰を求めよ．ここで，消費者余剰とは $[0,1]$ 区間上に分布している消費者全体の利得の合計である．ただし，ナッシュ均衡が存在しない場合はそれを証明せよ．

(3) $n = 2$ のとき，消費者余剰を最大にする出店場所を求めよ．また，このときの消費者余剰を求めよ．

(4) $n = 3$ のとき（すなわち 3 企業が出店を考えているとき），ナッシュ均衡をひとつ求めよ．また，均衡における消費者余剰を求めよ．ただし，ナッシュ均衡が存在しない場合はそれを証明せよ．

(5) $n = 4$ のとき（すなわち 4 企業が出店を考えているとき），ナッシュ均衡をひとつ求めよ．また，均衡における消費者余剰を求めよ．ただし，ナッシュ均衡が存在しない場合はそれを証明せよ．