専門科目 (午前)

2021　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

Mathematical and Computing Science

Time 9:30AM – 1:00PM

注意事項

1. 問 A, 問 B, 問 C より 2 問を選択し解答せよ.
2. 問 1～問 9 より 3 問を選択し解答せよ.
3. 要求された問題数を超えて解答した場合は採点されない可能性がある.
4. すべての解答用紙に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. 解答用紙に氏名を書いてはいけません.
6. 解答は 問題ごとに異なる解答用紙に記入せよ.
7. 1 つの問題の解答を複数の解答用紙に書く場合はページ番号を付けること.

Instruction

1. Solve 2 problems out of Problems A, B, and C.
2. Solve 3 problems out of Problems 1 to 9.
3. If you solved more problems than specified above, your answers might not be scored.
4. Write the problem number and your examinee number on each answer sheet.
5. Do not write your name on answer sheets.
6. Use separate answer sheets for each problem.
7. If you use multiple answer sheets for one problem, you should write problem number and page number on each answer sheet.

問 A

$\boldsymbol{A}$ を 4×4 行列，$\boldsymbol{b}$ を 4 次元列ベクトル，$\boldsymbol{I}$ を 4×4 単位行列とする．これらを左から順に並べた 4×9 行列 $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{I})$ の左側から 4×4 行列 $\boldsymbol{P}$ を乗じたとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る．以下の問に答えよ．

(1) 4×4 行列 $\boldsymbol{P}$ を記せ．

(2) $\boldsymbol{A}$ の行列式を計算せよ．

(3) 線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ を計算せよ．

(4) $\boldsymbol{A}$ の逆行列を計算せよ．

Problem A

Let $\boldsymbol{A}$ be a 4×4 matrix, $\boldsymbol{b}$ be a four-dimensional column vector, and $\boldsymbol{I}$ be the 4×4 identity matrix. We place them from left to right constructing the 4×9 matrix $(\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{I})$. Left-multiplying it by a 4×4 matrix $\boldsymbol{P}$, we obtain

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(1) Write the 4×4 matrix $\boldsymbol{P}$.

(2) Compute the determinant of $\boldsymbol{A}$.

(3) Compute a solution $\boldsymbol{x}$ of the linear equation $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

(4) Compute the inverse matrix of $\boldsymbol{A}$.

問 B

xy-平面 $\mathbb{R}^2$ の領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ で定義された関数

$$f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$

について以下の問に答えよ.

(1) $x = 0$ で定義された直線に沿って点 (x,y) が原点 $(0,0)$ に近づくときの $f(x,y)$ の極限を求めよ.

(2) $k \in \mathbb{R}$ を固定し, $y = kx$ で定義される直線に沿って点 (x,y) が原点に近づくとき, $|f(x,y)|$ は $+\infty$ に発散することを示せ.

(3) 任意の実数 a に対して, 原点に近づく D の点列 $((x_n,y_n))_{n\geq 1}$ で

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = a$$

となるものが存在することを示せ.

Problem B

Consider the following function

$$f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}$$

defined on the region $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ in the (x,y)-plane $\mathbb{R}^2$. Answer the following questions.

(1) Evaluate the limit of $f(x,y)$ as (x,y) approaches the origin $(0,0)$ along the line $x=0$.

(2) Fix $k \in \mathbb{R}$. Show that $|f(x,y)|$ diverges to $+\infty$ as (x,y) approaches the origin along the line $y = kx$.

(3) Show that for any $a \in \mathbb{R}$ there exists a sequence $((x_n, y_n))_{n\geq 1}$ in D approaching the origin such that

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = a.$$

問 C

A を空でない集合，$\prec$ を A 上の二項関係とする．x, y, z は A の要素を表す変数とし，$x \prec y$ でないことを $x \not\prec y$ と表記する．以下では $\prec$ の性質を論理式で表現する．たとえば $\prec$ が推移的であることは

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \big(((x \prec y) \land (y \prec z)) \Rightarrow (x \prec z)\big) \qquad (*)$$

と表せる．ただし $\land$ と $\Rightarrow$ はそれぞれ「かつ」と「ならば」を表す論理記号である．同様に「$\prec$ は継続的である」と「$\prec$ は非反射的である」をそれぞれ次の論理式で定義する．

$\forall x\ \exists y\ (x \prec y)$　（継続的）

$\forall x\ (x \not\prec x)$　（非反射的）

(1) $\prec$ が推移的でないことを表す論理式（つまり $(*)$ の否定）を書け．ただしその際に使用してもよい記号は以下だけである．

$\prec$，$\not\prec$，$\land$，$\lor$，$\Rightarrow$，$\forall$，$\exists$，変数，括弧．

(2) 次の条件をすべて満たす集合 A と関係 $\prec$ の例をひとつ挙げよ．

- A の要素数は 2.
- $\prec$ は推移的でない．
- $\prec$ は継続的である．

(3) 次を証明せよ．

$\prec$ が推移的かつ継続的かつ非反射的であるならば，A は無限集合である．

Problem C

Let A be a non-empty set, and $\prec$ a binary relation on A. In the following, x, y, and z are variables over A, and "$x \not\prec y$" represents "not $x \prec y$". We will describe properties of the relation $\prec$ by logical formulas. For example, "$\prec$ is transitive" is described as

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \big(((x \prec y) \wedge (y \prec z)) \Rightarrow (x \prec z)\big) \qquad (*)$$

where $\wedge$ and $\Rightarrow$ are logical symbols representing "and" and "implies", respectively. Similarly, "$\prec$ is serial" and "$\prec$ is irreflexive" are respectively defined by the following logical formulas.

$\forall x\ \exists y\ (x \prec y)$ (serial)

$\forall x\ (x \not\prec x)$ (irreflexive)

(1) Write a logical formula that describes "$\prec$ is not transitive" (i.e., the negation of $(*)$) where you can use only the following symbols.

$\prec$, $\not\prec$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, variables, parentheses.

(2) Show an example of a set A and a relation $\prec$ that satisfies all the following conditions.

- The number of elements of A is 2.
- $\prec$ is not transitive.
- $\prec$ is serial.

(3) Prove the following.

If $\prec$ is transitive, serial, and irreflexive, then A is an infinite set.

問 1

$\mathbb{Z}$ を整数のつくる加法群とする．$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を位数 9 の巡回群とし，$p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を自然な射影とする．$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ について以下の問に答えよ．

(1) $\sigma(p(1)) = p(4)$ をみたす準同型写像 $\sigma\colon \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ が $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ であるかどうか調べよ．

(2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の位数を求めよ．

(3) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の元の位数としてあらわれる数を列挙せよ．

(4) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}))$ の位数を求めよ．

Problem 1

Let $\mathbb{Z}$ be the additive group of integers and let $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ be a cyclic group of order 9. We denote by $p\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ the natural projection. On the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ of $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, answer the following questions.

(1) Determine whether $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$ or not for a homomorphism $\sigma\colon \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ such that $\sigma(p(1)) = p(4)$.

(2) Answer the order of $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$.

(3) Enumerate the orders of the elements of $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$.

(4) Answer the order of the automorphism group $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}))$ of $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})$.

問 2

集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ に位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}$$

により与え, X の部分集合 $\{1, 2, 4\}$ を M とおく. 以下の問に答えよ.

(1) M の閉包 $\overline{M}$, 内部 M° を求めよ.

(2) M の相対位相 $\mathcal{O}_M$ を求めよ.

(3)

$$\mathcal{O}' = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, X\}$$

とおく. X から X への全単射写像で, $(X, \mathcal{O})$ から $(X, \mathcal{O}')$ への連続写像になるものを全て求めよ.

Problem 2

For the set $X = \{1, 2, 3, 4\}$, take the topology

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, X\}$$

on X, and consider the subset $M = \{1, 2, 4\}$ of X. Answer the following questions.

(1) Determine the closure $\overline{M}$ and the interior M° of M.

(2) Determine the relative topology $\mathcal{O}_M$ on M.

(3) Set

$$\mathcal{O}' = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, X\}.$$

Find all bijective maps from X to X which are also continuous maps from $(X, \mathcal{O})$ to $(X, \mathcal{O}')$.

問 3

D を定数とする．$(-\infty, \infty) \times [0, \infty)$ 上で有界な C^2 級関数 $u(x,t)$ が次の初期値問題をみたすとする．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} \qquad (-\infty < x < \infty,\ t > 0), \\ u(x,0) = \sin(2x) + \cos x \qquad (-\infty < x < \infty). \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) $D = 0$ のとき，u を求めよ．

(2) $D = 1$ のとき，u を求めよ．

Problem 3

Let D be a constant. Let $u(x,t)$ be a bounded C^2 function over $(-\infty,\infty)\times[0,\infty)$ satisfying the following initial value problem.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} & (-\infty < x < \infty,\ t > 0), \\ u(x,0) = \sin(2x) + \cos x & (-\infty < x < \infty). \end{cases}$$

Answer the following questions.

(1) For $D = 0$, find u.

(2) For $D = 1$, find u.

問 4

パラメータ $s \in \mathbb{R}$ を含んだ線形計画問題

$$
\begin{array}{llrclclclcl}
\text{最大化} & : & & & & & (7+6s)x_1 & - & 4x_2 & + & (4-3s)x_3 \\
\text{制約} & : & x_4 & = & 1-3s & - & x_1 & - & 5x_2 & - & x_3 \\
& & x_5 & = & 1+6s & - & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 \\
& & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

に対して，以下の問に答えよ.

(1) $s = 0$ のとき，最適解が $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ を満たすことを示せ.

(2) $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ を満たす最適解が存在する s の範囲を示せ.

Problem 4

Consider a linear programming problem parameterized by $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{llrclclclcl}
\text{maximize} & : & & & & & (7+6s)x_1 & - & 4x_2 & + & (4-3s)x_3 \\
\text{subject to} & : & x_4 & = & 1-3s & - & x_1 & - & 5x_2 & - & x_3 \\
& & x_5 & = & 1+6s & - & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 \\
& & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0.
\end{array}$$

Answer the following questions.

(1) Suppose $s = 0$. Show that an optimal solution satisfies $x_2 = x_4 = x_5 = 0$.

(2) Compute the range of s such that there exists an optimal solution that satisfies $x_2 = x_4 = x_5 = 0$.

問 5

次の問に答えよ．

(1) 確率変数 $U_1, U_2, \ldots$ が互いに独立に $[0,1]$ 上の一様分布に従うとする．確率変数 $X_n = \max\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ の分布関数 $F_n(x) = \mathsf{P}(X_n \leq x)$ を求めよ．

(2) (1) の X_n を用いて $Y_n = n\,(1 - X_n)$ と置く．Y_n の分布関数 $G_n(y) = \mathsf{P}(Y_n \leq y)$ を求め，さらに Y_n の極限分布関数 $G(y) = \lim_{n\to\infty} G_n(y)$ を求めよ．

(3) (2) の Y_n の期待値 $\mathsf{E}[Y_n]$ を求め，さらにその極限 $\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[Y_n]$ を求めよ．

(4) 確率変数 $V_1, V_2, \ldots$ が互いに独立に確率密度関数 $f_V(v) = \begin{cases} e^{-v}, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0, \end{cases}$ の指数分布に従うとき，

$$Z_n = -\max\{V_1, V_2, \ldots, V_n\} + \log_e n$$

の極限分布関数 $H(z) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(Z_n \leq z)$ を求めよ．

Problem 5

Answer the following questions.

(1) Let $U_1, U_2, \ldots$ denote mutually independent random variables uniformly distributed on $[0,1]$, and let X_n denote a random variable defined by $X_n = \max\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. Derive the distribution function $F_n(x) = \mathsf{P}(X_n \leq x)$ of X_n.

(2) Let $Y_n = n(1 - X_n)$ by using X_n in (1). Derive the distribution function $G_n(y) = \mathsf{P}(Y_n \leq y)$ of Y_n, and further derive the limiting distribution function $G(y) = \lim_{n\to\infty} G_n(y)$.

(3) Derive the expectation $\mathsf{E}[Y_n]$ of Y_n in (2), and further derive its limit $\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[Y_n]$.

(4) Let $V_1, V_2, \ldots$ denote mutually independent random variables exponentially distributed with probability density function $f_V(v) = \begin{cases} e^{-v}, & v \geq 0, \\ 0, & v < 0, \end{cases}$ and let

$$Z_n = -\max\{V_1, V_2, \ldots, V_n\} + \log_e n.$$

Then, derive the limiting distribution function $H(z) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(Z_n \leq z)$ of Z_n.

問 6

$3n$ 個の確率変数 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ は互いに独立とする．$X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ は指数分布 $\mathrm{Exp}(\theta)$ に従い，また $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ は指数分布 $\mathrm{Exp}(\theta^2)$ に従うとする．さらに，$X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ の標本平均を $\overline{X}$ とし，$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ の標本平均を $\overline{Y}$ とする．パラメータ $\theta > 0$ で定まる指数分布 $\mathrm{Exp}(\theta)$ の確率密度関数 $p(x)$ は

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/\theta}}{\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

で与えられる．

(1) パラメータ θ に関する尤度関数 $L(\theta)$ を計算せよ．

(2) パラメータ θ の最尤推定量を $\overline{X}, \overline{Y}$ で表せ．

Problem 6

Suppose that $3n$ random variables $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ are independent of each other. Assume that X_1, $X_2, \ldots, X_{2n}$ are distributed from the exponential distribution $\mathrm{Exp}(\theta)$ and that $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ are distributed from the exponential distribution $\mathrm{Exp}(\theta^2)$. The sample mean of $X_1, X_2, \ldots, X_{2n}$ is denoted by $\overline{X}$, and the sample mean of $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ is denoted by $\overline{Y}$. For the parameter $\theta > 0$, the probability density $p(x)$ of the exponential distribution $\mathrm{Exp}(\theta)$ is defined by

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/\theta}}{\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(1) Find the likelihood function $L(\theta)$ for the parameter θ.

(2) Express the maximum likelihood estimator of the parameter θ using $\overline{X}$ and $\overline{Y}$.

問 7

アルファベット $\{\texttt{0},\texttt{1}\}$ 上の言語を考える．文字列 w に対して，$\#_{\texttt{0}}(w)$ を w に現れる 0 の個数，$\#_{\texttt{1}}(w)$ を w に現れる 1 の個数とする．たとえば，$\#_{\texttt{0}}(\texttt{01101}) = 2$, $\#_{\texttt{1}}(\texttt{01101}) = 3$ である．このとき，言語 A, B, C_n, D を以下のように定義する．

$$
\begin{aligned}
A =& \{w \mid \#_{\texttt{1}}(w) \text{ は偶数である }\}\\
B =& \{w \mid \#_{\texttt{1}}(w) \text{ は 3 の倍数ではない }\}\\
C_n =& \{w \mid \#_{\texttt{1}}(w) \text{ は } n \text{ の倍数である }\}\\
D =& \{w \mid \#_{\texttt{0}}(w) \text{ が } \#_{\texttt{1}}(w) \text{ の倍数であるか，または } \#_{\texttt{1}}(w) \text{ が } \#_{\texttt{0}}(w) \text{ の倍数である }\}
\end{aligned}
$$

以下の問いに答えよ．

(1) 言語 A と言語 B の正規表現 (注 1) をそれぞれ与えよ．

(2) n を 1 以上の整数とする．言語 C_n を認識する決定性有限オートマトンの形式的な定義 (注 2) を与えよ．

(3) 言語 D が正規でないことをポンピング補題 (注 3) を用いて示せ．

注 1: 正規表現
以下は，言語 $\{w \mid w \text{ は 0 で始まり 1 で終わる }\}$ に対する正規表現の例である．

$$\texttt{0}(\texttt{0} \cup \texttt{1})^*\texttt{1}$$

注 2: 決定性有限オートマトン
決定性有限オートマトンは以下の 5 つ組 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ である．

1. Q は状態の集合 (有限集合)
2. Σ はアルファベット (有限集合)
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ は状態遷移関数
4. $q_0 \in Q$ は開始状態
5. $F \subseteq Q$ は受理状態の集合

注 3: ポンピング補題
言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> w が $|w| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，w は次の条件を満たすように 3 つの部分 $w = xyz$ に分割できる:
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
> 2. $|y| > 0$
> 3. $|xy| \leq p$

ただし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．

Problem 7

Let the alphabet be $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. For a string w, $\#_\mathtt{0}(w)$ and $\#_\mathtt{1}(w)$ denote the numbers of 0's and 1's in w, respectively. For example, $\#_\mathtt{0}(\mathtt{01101}) = 2$ and $\#_\mathtt{1}(\mathtt{01101}) = 3$. Let A, B, C_n, and D be languages defined as follows.

$$
\begin{aligned}
A =& \{w \mid \#_\mathtt{1}(w) \text{ is an even number}\}\\
B =& \{w \mid \#_\mathtt{1}(w) \text{ is not a multiple of } 3\}\\
C_n =& \{w \mid \#_\mathtt{1}(w) \text{ is a multiple of } n\}\\
D =& \{w \mid \#_\mathtt{0}(w) \text{ is a multiple of } \#_\mathtt{1}(w), \text{ or } \#_\mathtt{1}(w) \text{ is a multiple of } \#_\mathtt{0}(w)\}
\end{aligned}
$$

Answer the following questions.

(1) Give regular expressions (Note 1) representing the languages A and B.

(2) Let $n \geq 1$. Give a formal definition of a deterministic finite automaton (Note 2) recognizing the language C_n.

(3) Prove that the language D is not regular by using the pumping lemma (Note 3).

Note 1: Regular expression
The following is an example of a regular expression representing the language $\{w \mid w \text{ begins with } \mathtt{0} \text{ and ends with } \mathtt{1}\}$.

$$\mathtt{0}(\mathtt{0} \cup \mathtt{1})^*\mathtt{1}$$

Note 2: Deterministic finite automaton
A deterministic finite automaton is a 5-tuple $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, where

1. Q is a finite set of states,
2. Σ is a finite alphabet,
3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ is the transition function,
4. $q_0 \in Q$ is the start state, and
5. $F \subseteq Q$ is the set of accept states.

Note 3: The pumping lemma
If L is a regular language, then there exists a number p (the pumping length) such that

> for any string w in L such that $|w| \geq p$, we can divide w into three pieces, $w = xyz$, satisfying the following conditions:
>
> 1. for each $i \geq 0$, $xy^iz \in L$,
> 2. $|y| > 0$, and
> 3. $|xy| \leq p$,

where y^i is the string obtained by concatenating i copies of y.

問 8

以下の問のプログラム中で a を整数型の配列とする.

(1) 次のプログラム断片は配列 a に格納された n 個の要素 a$[0], \ldots,$ a$[n-1]$ $(n \geq 1)$ をソートするものである. このプログラム断片の実行中に配列の要素への代入回数が**最大**となる場合と**最小**になる場合のそれぞれについて以下を答えよ.

(a) 配列の要素の参照回数

(b) 配列の要素への代入回数

参照回数と代入回数は, オーダー記法を用いずに n の多項式の形で書き表すこと.

```
for (int i = 0; i < n - 1; i = i + 1) {
  for (int j = i + 1; j < n; j = j + 1) {
    int a_i = a[i], a_j = a[j];
    if (a_j < a_i) {
        a[i] = a_j;
        a[j] = a_i;
    }
  }
}
```

(2) 大きさ $n = 2^m - 1$（ただし, m は正整数）の配列 a の要素が昇順に整列されていたとする. ここで, a から無作為に選んだ要素をキー (key) として, 以下のプログラム断片にしたがった二分探索を行う. このときの配列要素の参照回数の期待値を答えよ. ただし, キーは a$[0], \ldots,$ a$[n-1]$ から等確率で選択されると仮定すること.

```
int i = 0, j = n - 1;
while (true) {
  int c = (i + j) / 2;
  int a_c = a[c];
  if (key == a_c) {
    break;
  } else if (key < a_c) {
    j = c - 1;
  } else {
    i = c + 1;
  }
}
```

Problem 8

In the program fragments of the following questions, let `a` be an array of integer values.

(1) The following program fragment sorts the n data items $\mathtt{a}[0], \ldots, \mathtt{a}[n-1]$ $(n \geq 1)$ stored in the array `a`. Consider cases when the number of updates of array elements is **maximized** and **minimized**. For each of these cases, answer the following:

(a) the number of references to array elements and

(b) the number of updates of array elements.

The number of references and updates should be described by a polynomial in n, without using the O-notation.

```
for (int i = 0; i < n - 1; i = i + 1) {
  for (int j = i + 1; j < n; j = j + 1) {
    int a_i = a[i], a_j = a[j];
    if (a_j < a_i) {
        a[i] = a_j;
        a[j] = a_i;
    }
  }
}
```

(2) Suppose that the size of the array `a` is $n = 2^m - 1$, for a positive integer m and that the elements of the array are arranged in ascending order. Here we arbitrarily choose a key (`key`) element from the array `a`, and conduct a binary search for the key in the array using the following program fragment. Answer the expected number of references to array elements, when the key is chosen uniformly from $\mathtt{a}[0], \ldots, \mathtt{a}[n-1]$.

```
int i = 0, j = n - 1;
while (true) {
  int c = (i + j) / 2;
  int a_c = a[c];
  if (key == a_c) {
    break;
  } else if (key < a_c) {
    j = c - 1;
  } else {
    i = c + 1;
  }
}
```

問 9

あなたは4面のサイコロを持っており，その各面にはそれぞれ 1, 2, 3, 4 の数字が書かれている．1以上の整数 n について，任意の回数サイコロを振ったときサイコロの出目の和が n となる場合の数を S_n とおく．例えば和が 3 となる出目の系列は以下の 4 通りであるので，$S_3 = 4$ である．

```
1，1，1
1，2
2，1
3
```

(1) S_n を漸化式を用いて定義せよ．

(2) $S_n < 2^n$ が成り立つことを示せ．

(3) 与えられた1以上の整数 n について $O(n)$ 回の整数の加算で S_n を計算するアルゴリズムを設計し，その擬似コードを記述せよ．

Problem 9

You have a dice with four faces. The numbers 1, 2, 3 and 4 are placed on the faces. Consider the sum of the numbers obtained by throwing the dice any number of times. For a positive integer n, let S_n be the number of ways to throw when the sum is equal to n. For example, $S_3 = 4$ since there are the following four ways to throw the dice where the sum is equal to 3.

```
1, 1, 1
1, 2
2, 1
3
```

(1) Define S_n by a recurrence formula.

(2) Show $S_n < 2^n$.

(3) Design an algorithm computing S_n for given n with $O(n)$ integer additions, and describe pseudocode of the algorithm.