筆答専門試験科目（午前）　　　　２０２４ 大修

数 学 系　　　　時間　９：００〜１１：３０

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題 5 題すべてに解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 3 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の右に書くこと.

記号について:

$\mathbb{N}$ は 1 以上の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] n を 2 以上の整数とする. n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を 0 でない実数 a を用いて

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ a & (i \neq j) \end{cases}$$

で定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) A の最小多項式を求めよ.

(2) A の固有値を求めよ.

(3) A の階数を求めよ.

[2] n を正整数とし, $M_n(\mathbb{R})$ を実数を成分とする n 次正方行列全体の成す $\mathbb{R}$-線形空間とする.

(1) 任意の $\mathbb{R}$-線形写像 $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ はある $A \in M_n(\mathbb{R})$ により $f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$ と表されることを示せ. ここで Tr は行列のトレースである.

(2) 任意の $A,\ B \in M_n(\mathbb{R})$ について $g(AB) = g(BA)$ を満たすような $\mathbb{R}$-線形写像 $g : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ をすべて求めよ.

(3) V を $\{AB - BA \mid A,\ B \in M_n(\mathbb{R})\}$ により生成される $M_n(\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}$-線形部分空間とする. V の次元を求めよ.

[3] X, Y を位相空間とし, 直積集合 $X \times Y$ に直積位相が与えられているとする. 写像 $f : X \to Y$ に対し, 部分集合

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x),\ x \in X\}$$

に $X \times Y$ の相対位相を入れる. Y はコンパクトハウスドルフ空間であるとする. 写像 $p_X : X \times Y \to X$ と $p_Y : X \times Y \to Y$ を $p_X(x, y) = x$ と $p_Y(x, y) = y$ でそれぞれ定める.

(1) f が連続であり X が連結であるとき, $\Gamma(f)$ も連結であることを示せ.

(2) 任意の部分集合 $A \subset Y$ に対し次の等式が成立することを示せ.

$$f^{-1}(A) = p_X(p_Y^{-1}(A) \cap \Gamma(f)).$$

(3) p_X は閉写像であることを示せ.

(4) f が連続であるための必要十分条件は $\Gamma(f)$ が $X \times Y$ 内で閉集合であることを示せ.

[4] (1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n > 0$ とする. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ も収束することを示せ. また, この逆が成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

(2) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ および $x \in [0, \infty)$ に対し, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(x + n)^{\beta}} \qquad (*)$$

を考える. このとき, 次の (i), (ii), (iii) がすべて成り立つための必要十分条件を α, β を用いて表せ.

(i) 任意の $x \in [0, \infty)$ に対し, 級数 $(*)$ は収束する. (その和を $f(x)$ で表す.)

(ii) 各 $x \in [0, \infty)$ に対し (i) の実数 $f(x)$ を対応させる関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は連続である.

(iii) (ii) の関数 f に対し, 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ は収束する.

[5] (1) 連続関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ について, 有限な極限値 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ が存在するならば, f は $[0, \infty)$ 上で一様連続であることを示せ.

(2) 一様連続関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ について, $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} f(y)\, dy$ で定まる関数 F が $[0, \infty)$ 上で有界ならば, f も $[0, \infty)$ 上で有界であることを示せ.

筆答専門試験科目（午後）　　　　　２０２４ 大修

数 学 系　　　　　時間　１３：００〜１５：００

注 意 事 項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち 2 題を選択して解答せよ.
3. 解答は 1 題毎に別々の解答用紙に記入せよ.
4. 各解答用紙毎に必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で 4 ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを解答用紙の 1 ページ目の受験番号の右に書くこと.（午前と同じ分野を書くこと.）

記号について:

$\mathbb{N}$ は 1 以上の整数全体を表す.
$\mathbb{Z}$ は整数全体を表す.
$\mathbb{Q}$ は有理数全体を表す.
$\mathbb{R}$ は実数全体を表す.
$\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

[1] p を素数とし,

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{b}{a} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0,\ a \text{ と } p \text{ は互いに素} \right\}$$

とおく. X を不定元とする多項式環 $A = \mathbb{Z}_{(p)}[X]$ について以下の問いに答えよ.

(1) A は単項イデアル整域ではないことを示せ.

(2) A の単項な極大イデアル P であって, 剰余環 A/P が $\mathbb{Q}$ と環として同型となるものが存在することを示せ.

(3) A の単項な極大イデアル P であって, 剰余環 A/P が $\mathbb{Q}$ の二次拡大体と環として同型となるものが存在することを示せ.

[2] 多項式 $X^5 - 2$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を L とする.

(1) ガロア拡大 $L/\mathbb{Q}$ のガロア群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ を生成元と関係式により表示せよ.

(2) 5 次の可換 $\mathbb{Q}$ 代数 A であって $L \otimes_{\mathbb{Q}} A$ が直積代数 L^5 と L 代数として同型であるようなものを $\mathbb{Q}$ 上の同型を除いてすべて構成せよ.

[3] $n > 1$ とし, $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を n 次元単位球面, $f : S^n \to S^n$ を $f(x) = -x$ で定義される写像とする. 写像 f により写り合う点を同一視することにより n 次元実射影空間 $\mathbb{RP}^n$ が得られる.

(1) 整数 $k \geq 0$ に対して $A^k(S^n)$ を S^n 上の滑らかな k 形式のなすベクトル空間とし,

$$A^k_{\pm}(S^n) = \{\alpha \in A^k(S^n) \,|\, f^*\alpha = \pm\alpha\} \quad (\text{複号同順})$$

と定める. $A^k(S^n) = A^k_+(S^n) \oplus A^k_-(S^n)$ が成り立つことを示せ.

(2) 外微分 $d : A^k(S^n) \to A^{k+1}(S^n)$ は部分空間 $A^k_{\pm}(S^n)$ を複号同順で $A^{k+1}_{\pm}(S^n)$ に写すことを示せ.

(3) 多様体 M に対して M の k 次ド・ラームコホモロジー群を $H^k(M)$ で表す. $0 < k < n$ のとき, $H^k(S^n) = 0$ であることを用いて $H^k(\mathbb{RP}^n) = 0$ であることを示せ.

[4] $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$ とし, $p_N = (0, 0, 0, 1)$, $p_S = (0, 0, 0, -1)$, $q_1 = (0, 0, 1, 0)$, $q_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ とする. S^3 の部分集合

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \,|\, x_1 x_2 x_3 = 0\}$$

を考える. 以下, $\mathbb{R}^4$ の部分集合には $\mathbb{R}^4$ の通常の位相から定まる相対位相を与える.

(1) $X - \{p_N, p_S\}$, X の整係数ホモロジー群をそれぞれ求めよ.

(2) $X - \{q_1\}$, $X - \{q_2\}$ の 2 次ホモロジー群がいずれも $\{0\}$ でないことを示せ.

(3) $f : X \to X$ が同相写像ならば, $f(p_N) = p_N$ または $f(p_N) = p_S$ であることを示せ.

[5] D を $\mathbb{C}$ 内の領域とする．また, i を虚数単位とする．

(1) f を D 上の正則関数, c を D 内の区分的になめらかな単純閉曲線とする．曲線 c の内部が D に含まれ, c 上には f の零点が存在しないとき, c の内部にある重複度を込めた零点の個数は $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ で与えられることを示せ．ただし, 積分は c の内部に関して正の向きに c を一周するものとする．

(2) D 上の正則関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に D 上で広義一様収束するとき, f も正則であり, 導関数の列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ は f' に D 上で広義一様収束することを示せ.

(3) D 上の正則関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に D 上で広義一様収束し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n が D 上で単射であるならば, f は単射であるかまたは定数であることを示せ.

[6] $\mathbb{R}$ 内のルベーグ可測集合列 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(E_n) = 0 \qquad (*)$$

をみたし, $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値可積分関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数値可積分関数 f は

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus E_n} |f_n(x) - f(x)|\, d\mathcal{L}(x) = 0 \qquad (**)$$

をみたすとする．ただし, $\mathcal{L}$ は一次元ルベーグ測度である．

(1) 次の命題が成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

命題：$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ のある部分列 $\{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して, 数列 $\{f_{n_j}(x)\}_{j=1}^{\infty}$ は $f(x)$ にほとんどすべての点 $x \in \mathbb{R}$ において収束する.

(2) $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と f が条件 $(*)$, $(**)$ および

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|^2\, d\mathcal{L}(x) < \infty$$

をみたすとき, 次の等式が成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\, d\mathcal{L}(x) = 0.$$

[7] $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1\}$ とし, $C(D)$ を D 上の実数値連続関数全体のなすバナッハ空間とする. ただし, $f \in C(D)$ の $C(D)$ でのノルムは $\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$ である.

(1) 連続関数 $\psi : [0, \infty) \to [0, 1]$ が

$$\psi(t) = 0 \quad (0 \le t \le 1), \quad \psi(t) = 1 \quad (t \ge 2)$$

をみたすとする. 各 $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $\Psi_n(x) = \psi(n|x|)$ とし, $D \times D$ 上の関数 Φ_n を

$$\Phi_n(x, y) = \begin{cases} |x-y|^{-1} \Psi_n(x-y) & (x \ne y) \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

と定める. このとき, $f \in C(D)$ に対し,

$$T_n f(x) = \int_D \Phi_n(x, y) f(y)\, dy \quad (x \in D)$$

によって作用素 T_n を定めると, T_n は $C(D)$ 上のコンパクト作用素であることを示せ.

(2) $f \in C(D)$ に対し,

$$Tf(x) = \int_D |x-y|^{-1} f(y)\, dy \quad (x \in D)$$

によって作用素 T を定めると, T は $C(D)$ 上のコンパクト作用素であることを示せ.

[8] C^2 級関数 $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ であって, $h(-1) = h(1) = h'(-1) = h'(1) = 0$ をみたすもの全体の集合を X_0 で表す.

(1) C^2 級関数 $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ は, 任意の $h \in X_0$ に対し

$$\int_{-1}^{1} u(x)\Big(h''(x) + h'(x) + h(x)\Big)dx = 0$$

をみたすと仮定する. このとき, u は区間 $[-1, 1]$ 上で

$$u''(x) - u'(x) + u(x) = 0$$

をみたすことを示せ.

(2) $a \in \mathbb{R}$ とする. (1) の仮定をみたす u で, $u(0) = 0$ かつ $u'(0) = a$ をみたすものを求めよ.

(3) 連続関数 $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ に対し, u の区間 $[-1, 0]$ への制限 $u|_{[-1,0]}$ および区間 $[0, 1]$ への制限 $u|_{[0,1]}$ がそれぞれ C^2 級であり, さらに任意の $h \in X_0$ に対し

$$\int_{-1}^{1} u(x)\Big(h''(x) + h'(x) + h(x)\Big)dx = h(0)$$

であると仮定する. そのような u で, $u(-1) = u'(-1) = 0$ をみたすものを求めよ.