筆答専門試験科目（午前）　2024 大修
システム制御系（数学）

時間　９：３０～１１：３０

注意事項

1. 問題 1 から問題 4 まで，すべてについて解答せよ。
2. 解答始めの合図があるまで問題冊子を開かないこと。
3. 解答は問題ごとに別々の答案用紙に記入せよ。
   各答案用紙の裏面も解答に使用してよいが，ひとつの問題は 1 枚に収めること。
4. 解答開始の合図があったら，各答案用紙の受験番号欄に受験番号を，解答欄左上にその答案用紙で解答する問題番号を，試験科目名欄に科目名「システム制御系（数学）」を記入せよ。なお，答案用紙に氏名は書かないこと。
5. 提出時には，答案用紙を使わなかった分も含め全て提出すること。

（このページは落丁ではありません。問題は次ページ以降に記載されています。）

問題１

問１　３次元空間に直交座標系 $O\text{-}xyz$ をとる。 $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ で定められる領域Vの表面をSとする。 ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = (x,\ y,\ 0\,)$ で与えられる場合に次式のS上における法線面積分I_Aを計算せよ。

$$I_A = \int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

ただし，面積要素ベクトル$d\boldsymbol{S}$は領域Vの外向きを正とする。

問２　３次元空間に直交座標系 $O\text{-}xyz$ をとる。 $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ で定められる領域Vの表面をSとする。 ベクトル場 $\boldsymbol{B}$ が $\boldsymbol{B} = (x^3,\ z^2,\ y)$で与えられる場合に次式の$S$上における法線面積分$I_B$を計算せよ。

$$I_B = \int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

ただし，面積要素ベクトル$d\boldsymbol{S}$は領域Vの外向きを正とする。

（問題１終わり）

問題２

問１　$x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$として，$x_1$–$x_2$平面上に定義されるスカラー場$\phi(x) = x^T P x$とベクトル場$f(x) = Ax$を考える。ここで，$P = \begin{bmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}$，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$である。

(1) Pの固有値と，それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。なお，固有ベクトルは大きさ 1 として正規化せよ。

(2) $\phi(x) = 8$を満たすxの集合をx_1–x_2平面上に描け。このとき，(1)で求めた固有ベクトルもあわせて図示せよ。

(3) ベクトル$f(x)$はつねに$\phi(x)$が減少する方向に向いている。このことを示すために，原点を除く任意の$x \in \mathbb{R}^2$で$\phi(x)$の勾配ベクトル$\left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right]^T$とベクトル$f(x)$のなす角度が $\frac{\pi}{2}$ よりも大きいことを示せ。

問２　歪対称行列$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$を考える。歪対称行列とは，$P^T = -P$を満たす行列である。

(1) 歪対称行列の対角成分は 0 であることを示せ。

(2) nが奇数のとき，歪対称行列の行列式は 0 であることを示せ。

（問題２終わり）

問題３

問１　非負の連続で独立な確率変数X, Yを考え，それぞれ以下の確率密度関数$f_X(x)$, $f_Y(y)$に従うとする。

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

ここで，$\lambda > 0$とする。

(1) 確率変数Xのモーメント母関数$M_X(t)$が次のように表されることを示せ。ただし，$t < \lambda$である。

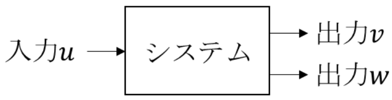
$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

(2) 確率変数Xの平均μ_Xと分散σ_X^2を求めよ。

(3) 確率変数XとYの和の確率変数$Z = X + Y$を考える。この確率変数Zのモーメント母関数$M_Z(t)$を求めよ。

(4) (3)で求めたモーメント母関数$M_Z(t)$を利用して，確率変数Zの平均μ_Zと分散σ_Z^2を求めよ。

問２　下図に示す１入力２出力のシステムを考える。



このシステムにおいて，N組の入出力データ$\{(u_i, v_i, w_i) | i = 1, 2, \cdots, N\}$が得られた。このデータを利用し，最小二乗法により入出力関係を次式で回帰することを考える。

$$v = au + a + b, \quad w = au^2 - 2au + a + b$$

(1) vの残差の二乗和E_vおよびwの残差の二乗和E_wを示せ。

(2) $E = E_v + E_w$を最小化するパラメータa, bは，下記の連立方程式を解くことにより求められる。入出力データ$\{(u_i, v_i, w_i) | i = 1, 2, \cdots, N\}$を用いて，$\alpha$, β, γ, ξ, ηを表せ。ただし，$\alpha\beta - \gamma^2 \neq 0$とする。

$$\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

（問題３終わり）

問題４

２つの実関数 $x_1(t)$ および $x_2(t)$ に関する次式の連立微分方程式を考える。

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(a - x_1^2 - x_2^2) - x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2(a - x_1^2 - x_2^2) + x_1$$

ここで，a は実定数とする。極座標変換 $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta$ を考え，$t \geq 0$ および $r(t) > 0$ として，以下の問に答えよ。

問１　$r(t)$ および $\theta(t)$ がそれぞれ次式の微分方程式に従うことを示せ。

$$\frac{dr}{dt} = r(a - r^2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

問２　$a < 0$ とする。

(1) 初期条件 $r(0) = \sqrt{-2a}$ のもとで問１の $r(t)$ に関する微分方程式を解け。
(2) 連立微分方程式の解 $x_1(t)$ および $x_2(t)$ に対して，t を 0 から∞まで連続的に変化させたとき，$(x_1(t), x_2(t))$ は x_1-x_2 平面上に軌跡を描く。$r(0) = \sqrt{-2a}$ および $\theta(0) = 0$ を満たす初期条件のもとで，この軌跡が $t \to \infty$ のときに漸近する集合 A を x_1-x_2 平面上に図示せよ。

問３　$a > 0$ とする。

(1) 初期条件 $r(0) = \sqrt{2a}$ のもとで問１の $r(t)$ に関する微分方程式を解け。ここで，任意の $t \geq 0$ に対して，$r(t) > \sqrt{a}$ が成り立つことを利用して良い。
(2) $r(0) = \sqrt{2a}$ および $\theta(0) = 0$ を満たす初期条件のもとで，連立微分方程式の解 $(x_1(t), x_2(t))$ が描く軌跡が $t \to \infty$ のときに漸近する集合 B を x_1-x_2 平面上に図示せよ。

（問題４終わり）